Exercice 31 : Contrôle de qualité : Bernoulli et Poisson à l'usine

Dans tout cet exercice, et sauf indication contraire, les résultats seront donné à 10^{-4} près.

Une usine produit des articles dont 5% présentent des défauts.

En vue du contrôle de qualité, on constitue un échantillon de 120 articles choisis au hasard dans la production. La production est assez importante pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 120 articles.

On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 120 articles, associe le nombre d'articles défectueux.

1. *a*) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. (Justifier.)

b) Déterminer la probabilité pour que l'échantillon ne contienne aucun article défectueux.

c) Déterminer la probabilité pour que l' échantillon contienne au plus un article défectueux.

d) Déterminer la probabilité pour que l'échantillon contienne au moins deux articles défectueux.

2. On admet qu'on peut approcher la loi précédente par une loi de Poisson.

a) Expliquer pourquoi le paramètre de cette loi est 6.

b) Déterminer dans ce cas la probabilité que l'échantillon contienne au moins un article défectueux.

c) Déterminer dans ce cas la probabilité que l'échantillon contienne au plus trois articles défectueux. (On donnera le résultat à 10^{-3} près.)

Exercice 33 : Approximation d'un loi binomiale par une loi de Poisson

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera calculée à 10^{-3} près.

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est $0,05$. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour choisi au hasard associe le nombre d'employé absents.

On admettra que X suit une loi binômiale $\mathcal{B}(20; 0,05)$.

1. Calculer la probabilité des événements suivants :

   a) E_1 : « *un jour donné il y a exactement 3 absents* »;

   b) E_2 : « *un jour donné il y a strictement plus de 2 absents* »;

   c) E_3 : « *un jour donné le nombre d'absents est compris entre 3 et 6 (bornes comprises)* ».

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de la variable X. Que représente $E(X)$?

3. On approche la loi binômiale du **1.** par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$, où n et p sont les paramètres de cette loi binômiale.

   a) En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question **2.**.

   b) Vérifier que les résultats obtenus au **4.** diffèrent de moins de 1% des résultats obtenus au **2.**.