Corrigés
de
MATHEMATIQUES
BTS hôtellerie

Michel Charrier
Professeur Agrégé

Tous les sujets
de juin 1996 à juin 2008

18 janvier 2009

BTS 1989

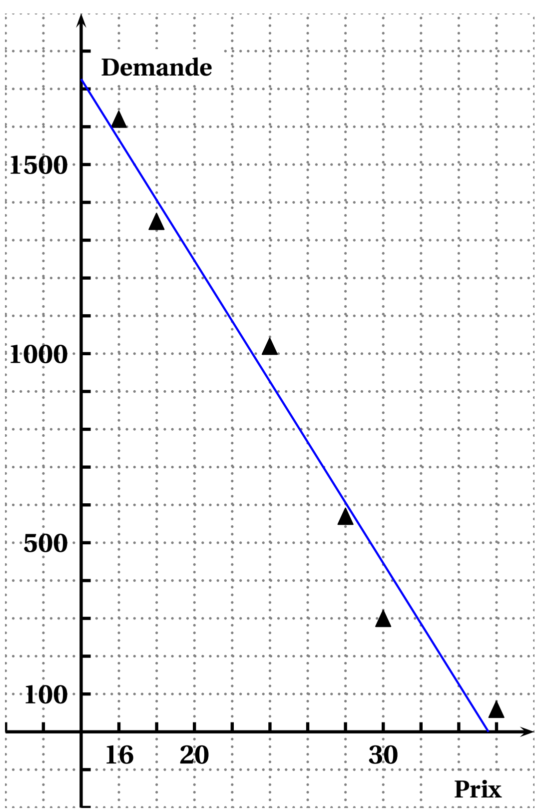
Les prix sont en € mais sont ceux proposés en 1989 mais en Francs : 1€ = 6,55957 F.

Une chaîne hôtelière projette d'ouvrir une unité supplémentaire à proximité d'une ville. Une enquête du service commercial auprès d'agences de voyage a permis de connaître l'évolution de la demande de nuitées en fonction du prix proposé :

prix en €	Demande mensuelle
16	1620
18	1350
24	1020
28	570
30	300
36	60

1. Construire le nuage des points (x_i, y_i) où la variable x est le prix et la variable y la demande. Unités graphiques : 1 cm pour 2 € en commençant la graduation à 10 € et 1 cm pour 50 clients.
2. Déterminer une équation de la droite d'ajustement du nuage par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront donnés à l'unité près). Cet ajustement est-il de bonne qualité ? (on donnera r à 10^{-2} près).
3. Si on suppose que l'ajustement trouvé donne une bonne corrélation entre x et y, déterminer l'expression du chiffre d'affaires prévisible de l'unité qui sera ouverte.
4. En déduire le prix de la nuitée qui maximise le CA mensuel prévisible et calculer ce CA.

Corrigé



1. graphique : voir ci-contre.
2. On obtient sur TI 82 :

$$y = -80x + 2846$$

$$r \approx -0,99$$

soit un très bon ajustement.

3. Soit f le CA : on a :

$$f(x) = x \times y = x(-80x+2846) = -80x^2+2846x$$

4.
$$f'(x) = -160x + 2846$$

le maximum de f est obtenu si :

$$f'(x) = 0$$

soit pour $x = \dfrac{2486}{160} \approx 18$ € .
et le CA est de : $f(18) \approx 25300$ €
($\approx$ 166 000 Francs en 1989).

BTS 1996

Enoncé actualisé en 2003

Les gérants d'un hôtel décident d'offir une nuit d'hôtel ou son remboursement à tout client ayant émis une réclamation et rempli un questionnaire sur l'amélioration de la qualité. L'analyse de l'année 2003 écoulée a donné les résultats :

X_i	0	1	2	3	4
N_i	199	125	30	10	1

Dans ce tableau :
X_i désigne le nombre de réclamations et de questionnaires remplis.
N_i est le nombre de jours de l'année 2003 ayant connu X_i réclamations.
L'hôtel a ouvert 365 jours en 2003. Le coût d'une nuit offerte est 30 €.

a. Calculer combien de réclamations avec questionnaires remplis ont été émises en 2003. Déterminer quel aurait été le coût du remboursement s'il avait été appliqué en 2003.

b. On désigne par X la variable représentant le nombre de réclamations avec questionnaires remplis par jour. Calculer la moyenne $E(X)$ et la variance $V(X)$.

c. On suppose qu'en 2004 la variable X donnant le nombre de réclamations avec questionnaires remplis suit une loi de probabilité dont les valeurs sont celles du tableau obtenu en 2003. Expliquer pourquoi la distribution de X peut être approchée par une loi de Poisson. Indiquer la valeur du paramètre λ de cette loi.

d. Calculer la probabilité des événements suivants :

A "N'avoir en 2004 aucune réclamation par jour"

B "Avoir en 2004 au plus 2 réclamations par jour"

Corrigé

a. $\sum X_i N_i = 0 \times 199 + 1 \times 125 + 2 \times 30 + 3 \times 10 + 4 \times 1 = 219$ soit un coût de : $219 \times 30 = 39420$ €.

b. $E(X) = \dfrac{\sum X_i N_i}{N} = \dfrac{219}{365} = 0,60$

et $V(X) = \dfrac{0^2 \times 199 + 1^2 \times 125 + 2^2 \times 30 + 3^2 \times 10 + 4^2 \times 1}{365} - (0,6)^2 = 0,601 \approx 0,6$

c. X suit une loi d'événements rares (les effectifs N_i élevés correspondent aux valeurs X_i faibles).
De plus $E(X) = V(X)$. On peut approcher la loi de X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0,6$.

d. A :$P(X=0) = \dfrac{0,6^0}{0!} e^{-0,6} = e^{-0,6} \approx 0,5488$

B :$P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx 0,8781$
Ces derniers résultats s'obtiennent directement avec la loi ou avec la table de la loi de Poisson.

BTS 1999

Le niveau atteint par le chiffre d'affaires "chambres" (CA héb) joue un rôle décisif dans les performances de l'hôtel. A partir des ventes de ses différents établissements, la chaîne a constaté que la distribution du CA heb prévisionnel suivait une loi normale dont les paramètres pour les 8 premiers mois de l'année sont :

- espérance mathématique : E(CA héb) = 3363625 F.
- écart-type : $\sigma = 336500$ F.

En octobre 1998, à l'occasion des travaux d'élaboration des budgets, on a calculé la probabilité pour le CA héb de dépasser 3900000 F pour les 8 premiers mois de l'exercice 1999. Quelle est cette probabilité ?
Le CA héb effectivement réalisé pendant cette période est de de 3800000 F. Commenter le modèle de loi de probabilité retenu.

Corrigé

$T = \dfrac{X - m}{\sigma} = \dfrac{X - 3363625}{336500}$

$$P(X \geqslant 3900000) = P\left(T \geqslant \frac{3900000 - 3363625}{336500} \approx 1,674\right)$$

La variable T suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$: $P(T \geqslant 1,674) = 1 - P(T \leqslant 1,674) = 1 - \Pi(1,674) = 1 - 0,9529 = 0,0471$. Le résultat est obtenu dans la table et avec une interpolation . On observe que le modèle est satisfaisant dans ce cas car la probabilité obtenue est faible .

BTS 2000

Une étude a montré qu'en moyenne 100 consultations d'un site hôtelier sur Internet entraînent 2 réservations fermes et que la variable aléatoire X qui mesure le nombre mensuel de réservations suit une Loi de Poisson. La première année le nombre moyen mensuel de consultations est estimé à 250.

1) Quel est le paramètre de la Loi de Poisson suivie par la variable aléatoire X ?
2) En utilisant la table de la Loi de Poison, déterminer la probabilté pour un mois donné que le nombre de réservations fermes soit :
   a) de 8 réservations.
   b) de 12 réservations.
   c) compris entre 8 (inclus) et 12 (inclus) réservations.

Corrigé

1) Le paramètre λ de la Loi de Poisson suivie par X est $\lambda = np$ soit $\lambda = 250 \times \dfrac{2}{100} = 5$. On remarque que les conditions d'application de la loi sont réunies : $n = 250 \geqslant 30$; $p = 0,02 \leqslant 0,1$ et $np = 5 < 15$.
2) En utilisant la table ou la formule : $P(X = k) = e^{-5} \times \dfrac{5^k}{k!}$, on obtient :
   a) $P(X = 8) = e^{-5} \times \dfrac{5^8}{8!} \approx 0,0653$
   b) $P(X = 12) = e^{-5} \times \dfrac{5^{12}}{12!} \approx 0,0034$
   c) Les événements $(X = 8)$ ... $(X = 12)$ sont disjoints, d'où :
   $P(8 \leqslant X \leqslant 12) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) \approx 0,0653 + 0,0363 + 0,0181 + 0,0082 + 0,0034 \approx 0,1313$

BTS 2003

Afin d'organiser une réception sur invitations dans un restaurant, le gérant dispose des statistiques d'autres établissements ayant déjà organisé ce type de manifestations. Ces données recensent le nombre de cartons d'invitation envoyés (valables pour 2 personnes), le nombre de cartons récupérés à l'entrée lors de l'arrivée des invités (nombre d'invitations honorées) et le nombre de convives présents. On obtient le tableau :

Invitations envoyées	1620
Invitations honorées	502
Convives présents	851

1. Calculer le pourcentage des cartons d'invitation honorés par les convives (arrondir à l'entier les plus proche).
2. Calculer le nombre moyen de convives présents par carton d'invitation honoré (arrondir à la première décimale).

On estime que les fréquences obtenues seront les probabilités d'une réception à venir. On envoie 500 cartons d'invitation. Le nombre d'invitation honorées est une variable aléatoire X qui suit une Loi Binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,31$.

1. Montrer que la loi de la variable X peut être approximée par une Loi Normale. Quels sont les paramètres de cette Loi Normale ?
2. **a.** Calculer la probabilité pour que le nombre d'invitations honorées soit compris entre 140 et 170.

   b. Si le nombre d'invitations honorées est compris entre 140 et 170, préciser l'intervalle dans lequel est compris le nombre de convives attendus.
3. Calculer la probabilité que le nombre de convives attendus dépasse la capacité d'accueil maximale de 300 personnes. Que peut-on en conclure ?

Corrigé

1. $$\frac{502}{1620} \approx 0,31$$
2. $$\frac{851}{502} \approx 1,7$$
3. X suit la loi $\mathscr{B}(500;0,31)$. n est grand et p pas trop grand ni trop petit, on peut donc utiliser la loi $\mathscr{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$ soit : $\mathscr{N}(155;10,34)$.
4. On introduit la variable $T = \dfrac{X-155}{10,34}$ qui suit la loi $\mathscr{N}(0,1)$.
   $P(140 \leqslant X \leqslant 170)$ équivaut à :
   $$P(-1,45 \leqslant T \leqslant 1,45)$$
   $P(-1,45 \leqslant T \leqslant 1,45) = 2\Pi(1,45) - 1 \approx 0,85$
5. Si le nombre de convives est supérieur à 300 , le nombre d'invitations honorées est supérieur à $\dfrac{300}{1,7} \approx 177$ et $P(X \geqslant 177)$ équivaut à : $P(T \geqslant 2,12)$. Or $P(T \geqslant 2,12) = 1 - P(T \leqslant 2,12) = 1 - \Pi(2,12) = 1 - 0,9830 = 0,017$. On peut donc lancer les invitations sans trop de risques que la capacité maximale soit dépassée.

Monsieur Clavel a compris que le restaurant n'atteint pas un niveau normal de fréquentation. Il fait réaliser une étude de notoriété en centre-ville auprès d'un échantillon de 50 personnes. Cette étude montre que le restaurant dispose d'une notoriété assistée actuelle de 15%.

1. Prouver que sur les 50 personnes interrogées, le nombre de personnes connaissant le restaurant du Mas du Père Soulas suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Donner la formule permettant de calculer la probabilité pour que 9 personnes sur les 50 connaissent le restaurant.
3. Montrer que l'on peut faire une approximation de cette loi par une loi normale et donner ses paramètres à 0,1 près.
4. Calculer la probabilité pour qu'au moins 8 personnes connaissent le restaurant sur les 50 interrogées.

Corrigé

1. X est la variable mesurant le nombre de personnes connaissant le restaurant parmi les 50 personnes interrogées.
   - chaque personne peut donner deux réponses exclusives : connaître le restaurant ($p = 0,15$) ou ne pas le connaître ($1 - p = 0,85$).
   - chaque avis est indépendant.

   On a donc : $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(50~;~0,15)$
2. $P(X = 9) = \mathrm{C}_{50}^{9}\, 0,15^9 \times 0,85^{41} \approx 0,123$.
3. Le nombre $n = 50$ est grand et $p = 0,15$ pas trop petit. et $np(1-p) = 50 \times 0,15 \times 0,85 = 6,375$ supérieur à 3.
   On peut donc faire une approximation de la loi binômiale apr une loi normale : $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m~;~\sigma)$ avec : $m = 50 \times 0,15 = 7,5$ et $\sigma = \sqrt{6,375} \approx 2,5$.
   $$X \rightsquigarrow \mathcal{N}(7,5~;~2,5)$$
4. $$P(X \geqslant 8) = P\left(T \geqslant \frac{8-7,5}{2,5}\right) = P(T \geqslant 0,20) = 1 - P(T < 0,20) \approx 1 - 0,5793 = 0,4207$$

BTS 2006

Pour approfondir l'étude du projet de ventes ambulantes, vous êtes chargé(e) d'évaluer la rentabilité du projet d'investissement de manière à renseigner les actionnaires. A l'aide des informations données ci-dessous en annexe, vous devez étudier s'il existe une corrélation entre les flux de passagers au départ dans l'aéroport et le nombre de clients pour l'ensemble des restaurants Eliass du site (valeurs données en millions de personnes).

Pour cela, en utilisant les résultats fournis par une calculatrice ou en présentant les calculs :

1. Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre le nombre de départs depuis 4 ans et le nombre de clients. Indiquez s'il y a une corrélation et justifier.
2. Déterminer une équation de la droite de régression par la méthode des moindres carrés. (Arrondir à 6 chiffres après la virgule les coefficients).
3. Estimez le nombre de clients Eliass correspondant à 28,3 millions de départs prévus en 2007.

Annexe :

	2002	2003	2004	2005
Nombre de départs enregistrés x	25,4	25,2	24,7	25,4
Nombre de clients Eliass y	10,2	10,1	9,9	10,2

$\sum x_i = 100,70 \quad \sum x_i^2 = 2535,4 \quad \sum y_i^2 = 108,10 \quad \sum x_i y_i = 1017,21$
$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 0,3275 \quad \sum (y_i - \bar{y})^2 = 0,06$
$\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 0,14.$

Corrigé

1. Obtenu sur TI 82 stats : $r \approx -0,91$ On peut donc estimer que la corrélation est bonne : $|r|$ voisin de 1.
2. La droite de régression a pour équation : $y = -0,108811\ x + 12,620934$.
3. Une estimation pour $x = 28,3$ millions de départ prévus en 2007 avec l'équation précédente donne :
$\hat{y} = -0,108811 \times 28,3 + 12,620934 \approx 9,84$ millions de clients Eliass.

BTS 2007

Après l'étude sur le développement des *spa* en hôtellerie, vous avez mené une enquête auprès de votre clientèle pour vérifier l'opportunité de proposer cette nouvelle prestation : 60 % des personnes présentes dans l'hôtel seraient intéressées par ce produit. On considère que leur choix est personnel et qu'il n'est pas influencé par celui des autres clients de l'hôtel. En supposant une journée avec 90 clients :

1. Quelle est la loi suivie par la variable X mesurant le nombre d'entrées dans les installations *spa* et donner les paramètres de cette loi. **Justifier**.
2. Présentez la formule permettant de calculer la probabilité que 50 personnes fréquentent les installations et calculer cette probabilité à 10^{-4} près.
3. Dans un soucis de simplification, il est possible d'approximer cette loi par une loi normale.
   a. Donner les paramètres de cette loi normale.
   b. En utilisant la table donnée en annexe, déterminer la probabilité que, pour cette journée, plus de 50 personnes fréquentent les installations *spa*.
   c. M WILIES cherche à fixer le seuil S de fréquentation en nombre de clients tel que le **spa** soit rentable. Il estime que ce seuil S est atteint dès que la probabilité que le nombre X d'entrées soit supérieur à S est de 44% (soit dès que : P(X>S)=0,44). Calculer S.

Corrigé

1. La loi suivie par X vérifie les conditions de la loi binomiale :
   – le choix de chaque personne est indépendant de celui des autres ;
   – chaque personne peut donner deux réponses exclusives : elle est intéressée (probabilité de succès 0,60) ou elle ne l'est pas (probabilité d'échec 0,40).

   La variable aléatoire X qui mesure le **nombre** k **de succès** suit une Loi Binômiale de paramètres $n = 90$ et $p = 0,60$. On note : $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(90; 0,60)$
2. $P(X = 50) = \mathrm{C}_{90}^{50} \times 0,60^{50} \times 0,40^{40} \approx 0,0585$
3. $n = 90$ est "grand" et $p = 0,60$ "pas trop petit", on peut approcher la loi $\mathscr{B}(90; 0,60)$ par la loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma)$ avec :
$$m = np = 90 \times 0,60 = 54$$
$$\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{90 \times 0,60 \times 0,40} \approx 4,65$$
4.
$$P(X > 50) = 1 - P(X \leqslant 50)$$
$$P(X \leqslant 50) = P\left(T \leqslant \frac{50-54}{4,65}\right) = P(T \leqslant -0,86) = 1 - \Pi(0,86)$$
   D'où :
$$P(X > 50) = 1 - (1 - \Pi(0,86)) = \Pi(0,86) \approx 0,805$$
5. Dans cette question, on cherche S tel que :
$$P(X > S) = 0,44$$
   ou encore :
$$P(X \leqslant S) = 0,56$$
$$P(X \leqslant S) = P\left(T \leqslant \frac{S-54}{4,65}\right) = 0,56$$
   Une lecture inverse de la table avec interpolation donne : $\Pi(0,151) = 0,5600$. On a donc :
$$\frac{S-54}{4,65} = 0,151$$
   soit : $S \approx 54,702$ donc à partir de 55 clients, le spa est rentable.

Table des matières